Werden die Junktoren der klassischen Logik richtig interpretiert?

S. O. Welding

In einer modernen Einführung in die klassische Logik werden die logischen Verknüpfungen von Aussagen weitgehend übereinstimmend[1] durch Wahrheitsfunktionen bestimmt. Es lässt sich zeigen, wie mir scheint, dass (I) diese Auffassung von den Junktoren eine logische Inkonsistenz impliziert, dass (II) sich die Junktoren nicht als Wahrheitsfunktionen begrifflich erfassen lassen und dass (III) es notwendig ist, die Junktoren als non-funktionale Wahrheitswertrelationen zu interpretieren.

I

Es wird zwischen einstelligen und zweistelligen logischen Junktoren unterschieden; die ersteren bestehen in der Affirmation und in der Negation einer Aussage, die letzteren in zwei zusammengesetzten Aussagen, komplexen oder Gesamtaussagen[2] wie u.a. in der Konjunktion, Disjunktion und Implikation. Die Wahrheit oder die Falschheit einer einstelligen Verknüpfung geht aus zwei Wahrheitsmöglichkeiten und -bedingungen und einer zweistelligen Verknüpfung aus vier Wahrheitsmöglichkeiten und -bedingungen hervor. Dieser Sachverhalt wird z. B. von Barwise und Etchemendy durch die wahrheitsfunktionale Eigenschaft der Junktoren noch ergänzt:

> „Die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ sind wahrheitsfunktional. Wie bemerkt, bedeutet dies Folgendes: Der Wahrheitswert eines komplexen Satzes, der mittels eines dieser Symbole gebildet ist, ergibt sich einfach aus den Wahrheitswerten der unmittelbaren Bestandteile des Satzes. Um also zu wissen, ob P $\vee$ Q wahr ist, müssen wir nur die Wahrheitswerte von P und Q kennen. Dieser einfache Zusammenhang erlaubt es uns, die Bedeutungen wahrheitsfunktionaler Junktoren mittels Wahrheitstafeln darzustellen.“[3]

Wie für die Formel $p \rightarrow p$ zwei Wahrheitsmöglichkeiten und -bedingungen in Betracht zu ziehen sind, so verhält es sich jedoch nicht mit den Formeln $\neg (p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$, wenn Logiker in großer Übereinstimmung[4] p und $\neg p$ in dem Nicht-Widerspruchsprinzip $\neg (p \wedge \neg p)$ und in dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten $p \vee \neg p$ als verschiedene Aussagen auffassen; denn danach müssten

[1] Mit Ausnahme der logischen Partikel, vgl. Lorenzen 1969[2], 11.
[2] Hoyningen-Huene 1998, 37 f.
[3] Barwise, Etchemendy 2005, 97.
[4] Vgl. S. O. Welding 2011[2], Kap. 3.

für diese Formeln oder Prinzipien wie für die Formel $p \rightarrow q$ vier Wahrheitsmöglichkeiten und -bedingungen ausschlaggebend sein. Bezogen auf beide Prinzipien wird die Lehrmeinung vertreten, wie beispielsweise von Stebbing:

> "It should be observed that both the principle of excluded middle and the principle of contradiction are required to define 'contradictory propositions'. The principle of contradiction alone does not suffice to show that *p* and *-p* are contradictories; they might be contraries."[5]

Ganz entsprechend argumentiert Tarski, wenn er feststellt, allein aus dem Nicht-Widerspruchsprinzip gehe nur hervor, „that one of these sentences must be false“, und allein aus dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten „that one of the two sentences must be true.“[6] Dieser Aspekt ist auch für Blanché[7] grundlegend, wenn er erläutert, nach dem Nicht-Widerspruchsprinzip könnten p und $\neg p$ nicht zusammen wahr, eine der beiden Aussagen müsse wenigstens falsch sein, und nach dem Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten könnten p und $\neg p$ nicht zusammen falsch sein, eine der beiden Aussagen müsse wenigstens wahr sein; denn erst aus der Konjunktion der beiden Prinzipien, die auch das „Prinzip der Alternativität“ heißen könnte, gehe hervor, dass nur die eine Aussage wahr und die andere falsch ist. Diese beiden Prinzipien wären als metalogische Konzeptionen einer analogen Interpretation ausgesetzt, da in ihnen die logischen Junktoren bereits als definiert zugrunde gelegt und den Aussagen jeweils eine der beiden Wahrheitswerte zugeordnet werden. Die Ansicht von p und $\neg p$ als zwei verschiedene Aussagen scheint Überlegungen nahezulegen, die Gültigkeit des einen oder des anderen Prinzips zu leugnen.[8]

Wenn p die Negation von $\neg p$ und die Negation von p identisch mit $\neg p$ ist, und wenn daher p und $\neg p$ weder *zusammen* wahr noch *zusammen* falsch sein können, wenn also diese beiden Wahrheitsmöglichkeiten notwendig entfallen, dann ist in diesen Prinzipien weder eine logische Verknüpfung zwischen p und $\neg p$ als zwei verschiedene Aussagen noch ein unterschiedlicher Inhalt festzustellen. Wie kann danach die logische Verknüpfung in der einen und in der anderen Formel überhaupt noch interpretiert werden?

[5] Stebbing 1950^7, 191.
[6] Tarski 1965^3, 135 f.
[7] Blanché 1955, 42.
[8] Vgl. Haack 1974; Priest, Beall, Armour-Garb 2004.

II

Die innovative Annahme von Wahrheitswerten durch Frege[9] für seine Erweiterung des mathematischen Funktionsbegriffs, den er durch sein Kriterium der Ergänzungsbedürftigkeit einer Funktion vollkommen abwandelte,[10] veranlasste offenbar Whitehead und Russell, anders als Frege, die logischen Konstanten, also die Junktoren von Aussagen hinsichtlich ihrer Wahrheitswerte als Wahrheitswertdependenzen und insofern als Wahrheitsfunktionen zu interpretieren:

> "It will be observed that the truth-values of $p \vee q$, $p \cdot q$, […] depend only upon those of p and q, namely the truth-value of "$p \vee q$" is truth if the truth-value of either p or q is truth, and is falsehood otherwise; that of "$p \cdot q$" is truth if that of both p and q is truth, and is falsehood otherwise […]".[11]

Es scheint nicht genügend klar zu sein, worauf mit ‚the truth values of . . .' oder entsprechend mit ‚the truth of . . .' eigentlich Bezug genommen wird. Mit der Behauptung „Die Wahrheit von (i) ‚x ist größer als y' hängt nur von geeigneten Zahlen ab, die für ‚x' und ‚y' eingesetzt werden", stellen wir die Bedingungen für die Wahrheit der Aussage (i) fest. Ganz entsprechend verhält es sich mit der Behauptung „Die Wahrheit der Aussage (ii) ‚Anton ist ein Rechtsanwalt oder Anton ist ein Politiker' hängt nur davon ab, ob wenigstens eine der beiden Aussagen ‚Anton ist ein Rechtsanwalt' und ‚Anton ist ein Politiker' wahr ist"; denn wir stellen dann die Bedingung für die Wahrheit der Aussage (ii) fest. Behaupten wir entsprechend mit Whitehead und Russell „Die Wahrheitswerte von (iii) ‚$p \vee q$' hängen nur von der Wahrheit wie auch von der Falschheit der Aussage (iii) ab", dann stellen wir deren Bedingungen sowohl für ihre Wahrheit als auch für ihre Falschheit fest. Mit der Wahrheits- beziehungsweise mit der Wahrheitswertabhängigkeit einer Aussage werden also die Bedingungen für die Wahrheit beziehungsweise für die Wahrheit und Falschheit dieser Aussage unabhängig von deren Inhalt konstatiert. Die Wahrheitswertabhängigkeit beschreibt keine Wahrheitsfunktion, sondern nur die in den Wahrheitstafeln dargestellte Beziehung zwischen den Wahrheitsbedingungen und den Wahrheitsmöglichkeiten.

---

[9] Frege 1891.
[10] Vgl. Welding 1977.
[11] Whitehead, Russell 1927², 7 f.; vgl. danach die logischen Junktoren als Wahrheitsfunktionen z. B.: Hilbert, Bernays 1968², 45 bis neuerdings: Kamitz 2007, 350.

III

Der Umstand, dass eine Wahrheitsabhängigkeit und infolgedessen auch eine Wahrheitswertabhängigkeit nicht mit einer Wahrheitsfunktion zu identifizieren ist, zeigt sich besonders deutlich darin, dass den Aussagen (i) – (iii) inhaltlich die Feststellung einer non-funktionalen zweistelligen Relation gemeinsam ist, nämlich (i) zwischen zwei Zahlen, (ii) zwischen den Wahrheitswerten der Aussagen „Anton ist ein Rechtsanwalt" und „Anton ist Politiker", und (iii) zwischen den Wahrheitswerten der Aussagen p und q. Wie in (i) keine Zusammensetzung von Zahlen, so wird in (ii) und (iii) entsprechend keine Zusammensetzung von Aussagen behauptet. Aus der jeweiligen Feststellung einer zweistelligen Relation in (ii) und (iii) geht die Disjunktion als eine non-funktionale Wahrheitswertrelation hervor. So kann der Standpunkt allgemein eingenommen werden, es handle sich bei der Affirmation, der Negation von p, bei der Konjunktion $p \wedge q$, der Disjunktion $p \vee q$ und der Implikation $p \rightarrow q$ nicht um ein- oder zweistellige Verknüpfungen von Aussagen, sondern von deren Wahrheitswerten, also um entsprechende Wahrheitswertrelationen. Wenn mit $p \rightarrow q$ eine Relation zwischen den Wahrheitswerten von p und q behauptet wird, dann muss entsprechend mit $p \rightarrow p$ eine Relation zwischen den Wahrheitswerten nur von p festgestellt werden, nämlich dass der jeweilige Wahrheitswert von p sich selbst impliziert oder mit sich selbst identisch ist. Ganz entsprechend besagen $\neg (p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$, der jeweilige Wahrheitswert von p sei unvereinbar mit seiner Negation oder der jeweilige Wahrheitswert von p schließe seine Negation aus. Wenn daher in diesen beiden Formeln eine logische Verknüpfung nur zwischen den Wahrheitswerten von p behauptet wird, und infolgedessen nicht die Aussagen p und $\neg p$, sondern nur die Wahrheitswerte von p differieren, dann wird mit zwei Wahrheitsmöglichkeiten und -bedingungen für den jeweiligen zweistelligen logischen Junktor auf die Feststellung erneut verwiesen, die Junktoren seien nicht Verknüpfungen von Aussagen, sondern von deren Wahrheitswerten. In den Formeln $p \rightarrow p$, $\neg (p \wedge \neg p)$ und $p \vee \neg p$ wird logisch nur unterschiedlich die gleiche reflexive Relation zwischen den Wahrheitswerten nur von p ausgedrückt. Der Umstand, dass die Junktoren nicht auf Aussagen, sondern auf deren Wahrheitswerte bezogen werden und daher konsistent als Wahrheitswertrelationen zu interpretieren sind, ist außerdem insofern bedeutsam, als er sich gravierend auf die Explikation der logischen Folgerung auswirkt.[12]

[12]Vgl. Welding 2011², Kap. 5.

Literatur

Barwise, Jon / Etchemendy, John 2005 (engl. 2002): *Sprache, Beweis und Logik 1*: *Aussagen- und Prädikatenlogik*, Paderborn.

Blanché, Robert 1955: *L'Axiomatique*, Paris.

Frege, Gottlob 1891: Funktion und Begriff, in: ders. 1994[7]: *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien*, hrsg. von Günther Patzig, Göttingen, 18-39.

Haack, Susan 1974: *Deviant logic: some philosophical issues*. London [u.a.].

Hilbert, David / Bernays, Paul 1968[2]: *Grundlagen der Mathematik I*, Berlin, Heidelberg, New York.

Hoyningen-Huene, Paul 1998: *Formale Logik. Eine philosophische Einführung*, Stuttgart.

Kamitz, Reinhard 2007: *Logik – Faszination der Klarheit 1*, Berlin.

Lorenzen, Paul 1969[2]: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin, Heidelberg.

Priest, Graham / Beall, JC / Armour-Garb, Bradley 2004: *The Law of Non-Contradiction. New Philosophical Essays*, Oxford.

Stebbing, Lizzie Susan 1950[7]: *A Modern Introduction to Logic*, London.

Tarski, Alfred 1965[3]: *Introduction to Logic and the Methodology of Deductive Sciences*, transl. by Olaf Helmer, New York.

Welding, Steen Olaf 1977: Schwierigkeiten in Freges Grundlagen der Logik, in: *Kant-Studien* 68, 420-445.

Welding, Steen Olaf 2011[2]: *Analytische Logik. Die Begründungsstruktur gültiger Schlüsse*, Münster.

Whitehead, Alfred North / Russell, Bertrand 1927[2]: *Principia Mathematica I*, Cambridge.